IPhO : Mécanique des fluides

When I meet God, I am going to ask him two questions : Why relativity ? And why turbulence ? I really believe he will have an answer for the first.
–Werner Heisenberg

1 Mécanique des fluides

1.1 Généralités, échelle de travail

A l'état fluide, la matière peut s'écouler. Gaz et liquides ont été définis dans le cours de thermodynamique, s'y reporter si nécessaire.

En mécanique des fluides comme en thermodynamique, on travaille en hydrodynamique à l'échelle mésoscopique.

Définition 1 : Échelle mésoscopique

C'est l'échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique, telle que

$$\text{échelle microscopique} << \text{échelle mésoscopique} << \text{échelle macroscopique}$$

En pratique, pour nous, cela correspond à des particules de taille de l'ordre de $0,1$ à $1\ \mu\mathrm{m}$.

On étudie ainsi des particules de fluides suffisamment petites pour être considérées ponctuelles à l'échelle macroscopique, et suffisamment grande pour apparaître continue : les grandeurs macroscopiques (pression, masse volumique) peuvent être définies.

1.2 La pression

Définition 2 : Pression

Les particules microscopiques de fluide sont toujours en mouvement, ce qui se traduit par une force pressante exercée normalement (cf cours de thermo) sur toute surface en contact avec le liquide. C'est la pression, qui s'exprime en Pascal, noté Pa : $1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. On a :

$$P = \frac{\text{norme de la force pressante normale}}{\text{surface sur laquelle elle s'exerce}} = \frac{\|\mathrm{d}\vec{f}\|}{\|\mathrm{d}\vec{S}\|}$$

Quelques ordres de grandeur :

Lieu	Pression (Pa)
Surface terrestre, en moyenne	$1{,}013 \times 10^5$
Sommet de l'Everest	$3{,}0 \times 10^4$
Fond de l'océan	$1{,}1 \times 10^8$
Ultravide en laboratoire	10^{-10} à 10^{-12}

Méthode 1 : Equation fondamentale de la statique des fluides et poussée d'Archimède

On étudie une particule infinitésimale parallépipédique et d'une masse volumique uniforme ρ_p, dans un fluide à l'équilibre de masse volumique locale ρ, à laquelle on va appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique.
Notons $\vec{e_z}$ l'axe vertical : $\vec{g} = -g\vec{e_z}$.

- Système : particule parallépipédique, de masse $m = \rho_p S\mathrm{d}z$
- Référentiel : terrestre supposé galiléen
- Forces :
  - Poids : $-\rho_p g S\mathrm{d}z\vec{e_z}$
  - Pression sur la surface du bas : $\vec{F_{bas}} = +p(z) \cdot S\vec{e_z}$
  - Pression sur la surface du haut : $\vec{F_{haut}} = -p(z+\mathrm{d}z) \cdot S\vec{e_z}$
  - Les pressions sur les surfaces latérales se compensent par symétrie.

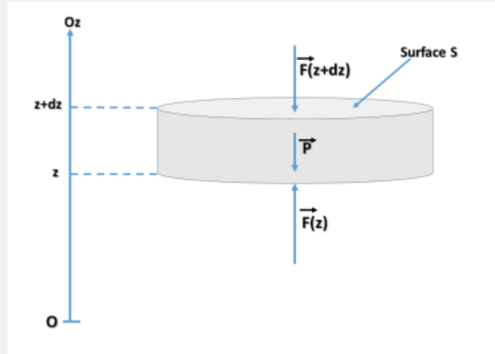

Figure 1 – Pression hydrostatique

Le PFD de cet équilibre s'écrit alors, en projetant sur $\vec{e_z}$:

$$0 = -\rho_p S g\mathrm{d}z + p(z)S - p(z+\mathrm{d}z)S$$

soit

$$-\rho_p g S\mathrm{d}z = p(z+\mathrm{d}z) - p(z)$$

On va se servir de cela pour établir nos deux résultats.

- Si notre particule est une particule du fluide, on a $p(z+\mathrm{d}z) - p(z) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$ par un développement de Taylor, et $\rho_p = \rho$, d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g}$$

  après simplification : c'est l'équation fondamentale de la statique des fluides.

- Si notre particule est un corps quelconque, la résultante des forces de pressions est $\delta\vec{\Pi} = -S(P(z+\mathrm{d}z) - P(z))\vec{e_z} = -\mathrm{d}V\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e_z}$. Donc , avec le résultat précédent :

$$\vec{\Pi} = \mathrm{d}V\rho g\vec{e_z}$$

  C'est l'expression de la poussée d'Archimède. De manière plus générale, sur un corps immergé (et pas forcément infinitésimal) de volume V, la poussée d'Archimède vaut $\vec{\Pi} = \rho g V\vec{e_z}$. On retrouve cela en intégrant sur sur ledit volume.

Méthode 2 : Pression dans un fluide incompressible

Ceci est une application capitale et quasiment immédiate de l'équation précédente. On considère une colonne d'un fluide incompressible. En intégrant $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$, on a

$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g z}$$

où P_0 est la pression en surface et z la profondeur.
Notons que la pression ne dépend donc que de la profondeur, et pas de l'endroit considéré dans le liquide.

1.3 L'équation de continuité

Si un fluide de masse volumique ρ s'écoule à travers une surface S pendant Δt, à une vitesse moyenne v, le débit massique D_m est défini par

$$D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v S$$

Le débit volumique correspond à l'équivalent pour le volume : si un volume ΔV a traversé la surface, le débit volumiuque est

$$D_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = vS$$

Bien sûr, comme $\Delta m = \rho \Delta V$, on a $D_m = \rho D_v$
L'équation de continuité dit que, pour l'écoulement d'un fluide incompressible, ces quantités sont constantes. Ainsi, pour un fluide incompressible,

$$vS = \mathrm{Cste}$$

Par exemple, lors de l'évolution de la section d'une canalisation comme sur la figure 2, cela se traduit par l'égalité $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

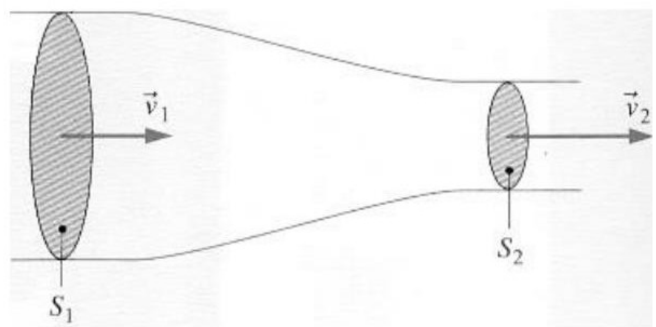

Figure 2 – Evolution de la section d'une canalisation

2 Écoulement et théorème de Bernoulli

2.1 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie dans le fluide. Sa démonstration n'est pas exigible, ni même son énoncé pour l'épreuve de sélection pour les terminales. On l'admettra donc, en étudiant certains de ses applications.

Propriété 1 : Théorème de Bernoulli

Soit un fluide en écoulement parfait (sans frottement visqueux), stationnaire et incompressible. On admet alors l'équation de Bernoulli : en tout point M du fluide, on note v la vitesse du fluide, P sa pression, ρ sa masse volumique, z l'altitude. Alors :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = Cste$$

Si l'écoulement varie suffisamment lentement au cours du temps, on pourra le considérer comme stationnaire pour appliquer le théorème.
Pour aiguiller le sens physique, cela traduit une conservation d'énergie : le premier terme est l'énergie cinétique, le deuxième l'énergie potentielle de pesanteur, le troisième l'énergie associée aux forces de pression.

Ainsi, dans un écoulement parallèle, les zones de rétrécissement sont celles de pression minimale.
Cela explique par exemple la forme des ailes d'avions : les ailes étant bombées, l'air a plus de distance à parcourir lorsqu'il passe par-dessus l'aile que lorsqu'il passe dessous. S'ensuit une pression plus élevée en dessous qu'au-dessus de l'aile, donc une portance.

2.1.1 Exemple : Le phénomène de Venturi

Un tube de Venturi est un tube dont la section connaît un rétrécissement qui conserve la symétrie cylindrique, qui a donc deux sections différentes S_A et S_B comme sur le schéma. Un fluide considéré parfait incompressible de masse volumique ρ s'écoule en régime permanent dans ce tube. On constate que les altitudes h_A et h_B des surfaces libres d'eau ne sont pas les mêmes dans les différents tubes verticaux.

En effet, l'équation de continuité nous dit que

$$v_a S_A = v_B S_B$$

.

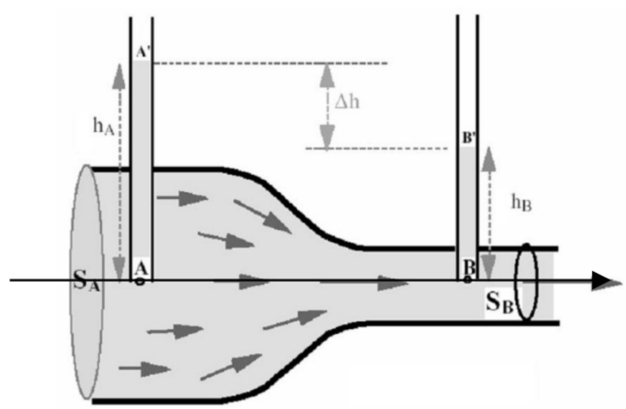

Figure 3 – Schéma : effet Venturi

On peut alors utiliser l'équation de Bernoulli :

$$p_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = p_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

qui se réécrit

$$(p_A - p_B) = \frac{\rho v_A^2((\frac{S_A}{S_B})^2 - 1)}{2}$$

car $z_A = z_B$. Enfin, dans les tubes verticaux, le fluide est au repos, ce qui permet d'écrire (pression dans un fluide incompressible) :

$$p_A = p_0 + \rho g h_A$$

et

$$p_B = p_0 + \rho g h_B$$

En assemblant :

$$\rho g(h_A - h_B) = \frac{\rho v_A^2((\frac{S_A}{S_B})^2 - 1)}{2}$$

.
On arrive à une expression de la vitesse à partir des sections, de g, et de h_A et h_B ! En effet, on a finalement

$$v_A = \sqrt{2g\frac{h_A - h_B}{(\frac{S_A}{S_B})^2 - 1}}$$

On remarquera que la surface libre la plus haute correspond à la section la plus grande.

2.1.2 Exemple : Le théorème de Torricelli

Une autre application relativement simple du théorème de Bernoulli est le problème suivant : on considère un bocal de section S, rempli d'un liquide incompressible et masse volumique ρ, et percé d'un trou de diamètre petit devant la section du bocal, duquel sort du liquide.
On adopte les notations du schéma. On va exprimer la vitesse d'éjection de l'eau au niveau du trou en fonction uniquement de g et de la hauteur h entre le trou et la surface libre.
Premièrement, l'équation de continuité assure que $v_A = \frac{s}{S}v_B$.Comme $\frac{s}{S} << 1$ on a $v_A << v_B$.
Écrivons maintenant l'équation de Bernoulli :

$$p_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = p_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

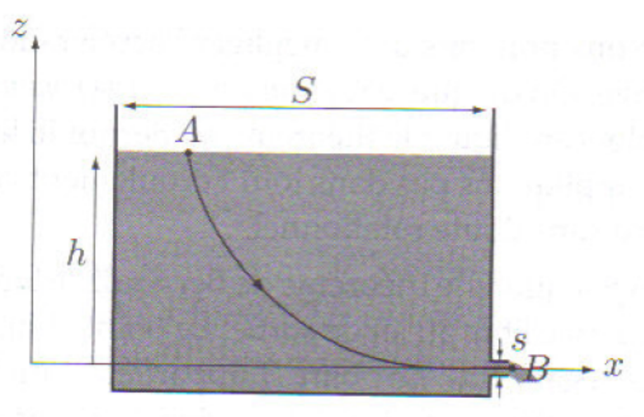

Figure 4 – Schéma : théorème de Torricelli

Comme les points A et B sont au contact de l'atmosphère, $p_A = p_B$. De plus, $h = z_A - z_B$ par définition.
On peut donc écrire

$$gh = \frac{v_b^2 - v_A^2}{2}$$

Comme $v_A << v_B$, on peut approximer $v_B^2 - v_A^2 \approx v_B^2$, d'où finalement

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

la formule espérée !

3 Tensions de surface

Disclaimer : les tensions de surface ne sont au programme du test de présélection des IPhOs que pour les élèves en 1e année de CPGE. On ne les retrouvera pas dans le fichier d'exercices. Le lecteur intéressé pourra consulter le cours de FemtoPhysique sur la tension superficielle, qui détaille plus le sujet, et dont les exemples peuvent tout à fait servir d'exercices pour appréhender les notions.

3.1 Energie superficielle

Lorsqu'on pose une petite pièce délicatement sur une surface d'eau, celle-ci peut flotter, ce que les phénomènes vus jusqu'ici ne permettent pas d'expliquer. Cela fait en effet appel aux tensions de surface, auxquelles la troisième partie de ce cours est consacrée.

3.1.1 Origine microscopique

Pour comprendre l'origine de la tension superficielle, il faut retourner à l'échelle microscopique du liquide. Dans un liquide, chaque particule est soumise à l'attraction de Van der Waals (et/ou liaison hydrogène) des particules voisines. La résultante de ces forces est nulle si la particule considérée n'est pas au bord du liquide car ces forces sont dirigées dans toutes les directions. Cependant, cela n'est plus le cas si on considère une particule de liquide à l'interface, par exemple, entre ledit liquide et un gaz.
Alors, la résultante est orientée côté liquide, et tout se passe comme si une membrane était "tendue" au-dessus du liquide. L'épaisseur de la couche superificielle concernée est de l'ordre de 1 à $100\mathrm{nm}$.

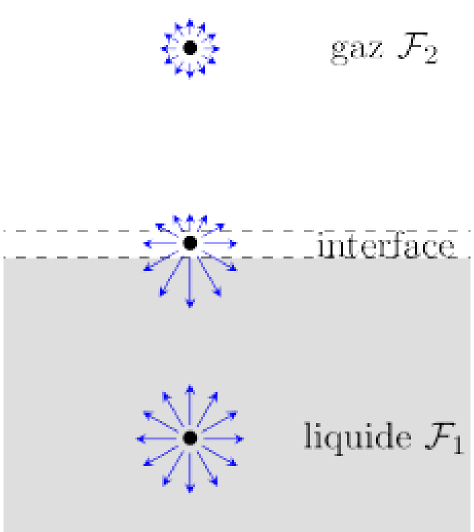

Figure 5 – Schéma : origine microscopique tension de surface

L'énergie potentielle dont dérive cette force superficielle dépend du liquide, et de la surface de l'interface. Pour minimiser cette énergie potentielle, tout système liquide va donc tendre à minimiser sa surface.
Cela explique la forme des bulles de savon : comme la sphère est la géométrie qui minimise la surface pour un volume donné (ici un volume d'air emprisonné), la bulle adopte spontanément cette forme.

Définition 3 : Energie superficielle

On peut définir une énergie surfacique, notée σ ou γ et qui s'exprime en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-2}$, soit en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, qui dépend du liquide considéré et de la température, telle qu'il faut apporter une énergie $\sigma\mathrm{d}S$ pour agrandir l'interface d'une surface $\mathrm{d}S$

Le coefficient de proportionnalité σ est le coefficient de tension superficielle. En voici quelques ordres de grandeur :

Liquide	σ à $20\,°\mathrm{C}$ ($\mathrm{J\,m^{-2}}$)
Eau	$73 \cdot 10^{-3}$
Ethanol	$22 \cdot 10^{-3}$
Mercure	$480 \cdot 10^{-3}$

3.2 Force capillaire

On considère un cadre métallique comme sur le schéma ci-contre, dont un côté peut se translater, sur lequel est formé un film de savon. On constate alors une force qui tire sur l'interface, tangentiellement à la surface, de manière à réduire son aire.
Ainsi, sur une tige mobile de longueur L, la surface exerce une force en traction de $F = \sigma L$; il faut donc apporter une énergie $\delta E = F\delta x = \sigma L \delta x$ pour tirer la tige de δx de manière à agrandir l'interface, sur la gauche sur le schéma ci-contre.

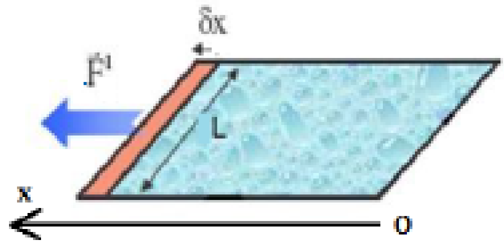

Figure 6 – Schéma : force capillaire

3.3 Calculs de pressions

Lorsqu'on traverse une surface de séparation entre deux fluides dont les rayons de courbure sont R et R', la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur est

$$\Delta p = p_{int} - p_{ext} = \sigma(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'})$$

.
Les deux rayons de courbure sont les rayons de courbure dans deux directions perpendiculaires entre elles et toutes deux tangentes à la surface. Ainsi, pour une courbure sphérique, $R = R'$, et pour une courbure cylindrique, $R' = 0$.

Méthode 3 : Bulle de savon

Pour une bulle de savon sphérique de rayon R, on a $R = R'$. Comme on traverse deux interfaces air-savon, la bulle étant remplie d'air, on a $p_{int} - p_{ext} = 4\frac{\sigma}{R}$